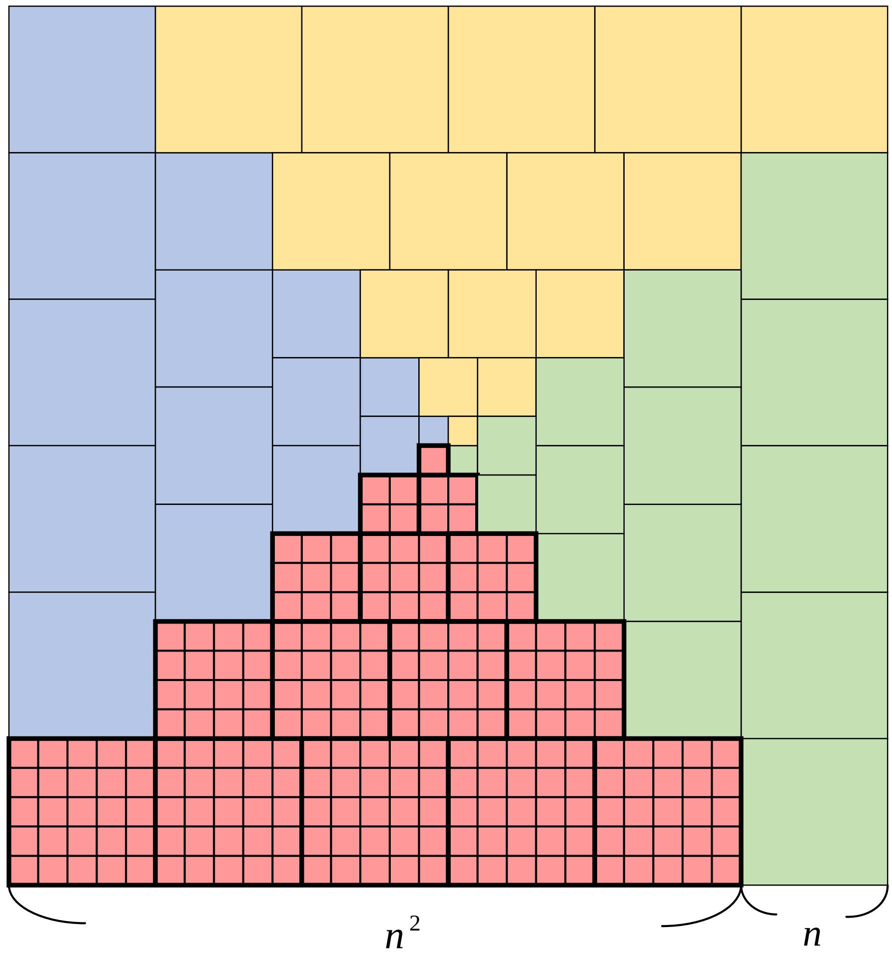
無字證明，按圖索驥：正整數立方和公式

對任何正整數 $\boldsymbol{n}$，我們有

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

【無字證明】



$$4\left(1\times1^2+2\times2^2+\cdots+n\times n^2\right)=\left[n\left(n+1\right)\right]^2$$

【按圖索驥】

1. 先在方格紙中，由上往下數的第一層放入一個1×1的紅色正方形，第二層放入二個2×2的紅色正方形，⋯，第 n 層放入 n 個$n\times n$的紅色正方形，並將其緊密排齊，如上圖所示，可知紅色正方形的總面積為$1\times1^2+2\times2^2+\cdots+n\times n^2$。

2. 將所有的紅色正方形順時針旋轉90°後著上藍色，堆疊在紅色正方形的左上方；再將所有的紅色正方形順時針旋轉180°後著上黃色，堆疊在藍色正方形的右上方；最後將所有的紅色正方形順時針旋轉270°後著上綠色，堆疊在黃色正方形的右下方，如上圖所示，且知每種顏色的正方形總面積均為$1\times1^2+2\times2^2+\cdots+n\times n^2$。

3. 觀察可發現四種不同顏色的正方形可拼貼而成一個邊長為$\left[(n\times n)+n\right]$的大正方形，因此四種顏色的正方形總面積恰為大正方形的面積，即

$$4\left(1\times 1^2+2\times 2^2+\cdots+n\times n^2\right)=\left[(n\times n)+n\right]^2,$$

化簡後可得$\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)=\dfrac{1}{4}\left[n(n+1)\right]^2$。

【伯樂賞馬】

1. 溯源：
   (1) Warren Lushbaugh**.** *Mathematical Gazette*, vol. 49, no. 368 (May 1965), p. 200.
   (2) Antonella Cupillari**.** *Proof without words : Sum of integers* , *Mathematics Magazine*, vol. 62, no. 4 (Oct 1989), p. 259.
   (3) Nelsen, Roger B. (1997). *Proofs Without Words I: Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, p. 87.
   (4) 蔡宗佑(2017)。按圖索驥——無字的證明 2(頁 89)。臺北市：三民出版社。

2. 賞析：
   此證明的手法在立方和公式中相當普遍，主要將正方形重組、拼貼後，透過不同的面積求和方法來推導公式，過程中雖然稍嫌技巧，但對於平時接觸較多代數證明的學生而言，勢必有耳目一新的感覺，也能從視覺的角度來欣賞數學之美。

3. 領域與評量：

數學領域	年級	適合腳本	評比
■數與量(N) □代數(A) □空間與形狀(S) □坐標幾何(G) □函數(F) □資料與不確定性(D)	□國一 □國二 □國三 ■高一 □高二 □高三	□靜態文本 ■動態表演	★ ★ ★ ☆ ☆